Naloga I–1

Poišči vse surjektivne funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, za katere za vsa naravna števila a in b velja natanko ena izmed naslednjih enačb:

$$f(a) = f(b),$$

$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Opombi: $\mathbb{N}$ označuje množico vseh naravnih števil. Funkcija $f\colon X \to Y$ je surjektivna, če za vsak $y \in Y$ obstaja $x \in X$, tako da je $f(x) = y$.

Naloga I–2

Naj bo $n \geqslant 3$ naravno število. *Notranja diagonala enostavnega n-kotnika* je diagonala, ki v celoti leži v notranjosti n-kotnika. Z $D(P)$ označimo število vseh notranjih diagonal enostavnega n-kotnika P in z $D(n)$ najmanjšo možno vrednost $D(Q)$, kjer je Q enostaven n-kotnik. Dokaži, da se nobeni dve notranji diagonali enostavnega n-kotnika P ne sekata (razen morda v skupnem krajišču) natanko tedaj, ko velja $D(P) = D(n)$.

Opomba: Enostaven n-kotnik je mnogokotnik brez samopresečišč z n oglišči. Mnogokotnik ni nujno konveksen.

Naloga I–3

Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik. Naj bo E presečišče premice, vzporedne AC, ki poteka skozi B, in premice, vzporedne BD, ki poteka skozi A. Premica EC seka trikotniku AEB očrtano krožnico še v F, premica ED pa še v G. Dokaži, da točke C, D, F in G ležijo na isti krožnici.

Naloga I–4

Poišči vse urejene pare naravnih števil (m, n), za katere obstajata tuji si naravni števili a in b, obe strogo večji od 1, tako da je

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

naravno število.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.

Naloga T–1

Dokaži, da za vsa pozitivna realna števila a, b in c, za katera je $abc = 1$, velja naslednja neenakost:

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Naloga T–2

Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, za katere velja

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

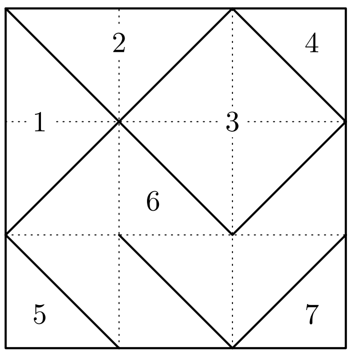
za vsa neničelna realna števila x in y.

Naloga T–3

V vrsti na mestih od 1 do n stoji n učencev. Medtem ko učitelj pogleda stran, nekateri izmed učencev spremenijo mesto. Ko učitelj pogleda nazaj, spet stojijo v vrsti. Če je bil učenec na začetku na i-tem mestu, zdaj pa je na j-tem mestu, rečemo, da se je premaknil za $|i-j|$ korakov. Določi največjo možno vsoto korakov vseh učencev, ki jo lahko dosežejo.

Naloga T–4

Naj bo N naravno število. V vsakega izmed N^2 enotskih kvadratov tabele velikosti $N \times N$ narišemo eno izmed dveh diagonal. Narisane diagonale delijo tabelo $N \times N$ na K območij. Za vsak N določi najmanjšo in največjo možno vrednost K.



Primer za $N = 3$, $K = 7$

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.

Naloga T–5

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik z $|AB| > |AC|$. Dokaži, da obstaja točka D z naslednjo lastnostjo: če poljubni dve različni točki X in Y ležita v notranjosti trikotnika ABC, tako da točke B, C, X in Y ležijo na isti krožnici in velja

$$\sphericalangle AXB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CYA - \sphericalangle CBA,$$

potem točka D leži na premici XY.

Naloga T–6

Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice, kjer je $|AB| > |AC|$, in naj premica AI seka stranico BC v točki D. Predpostavimo, da točka P leži na daljici BC tako, da velja $|PI| = |PD|$. Naj bo J zrcalna slika točke I preko simetrale daljice BC. Naj bo Q drugo presečišče trikotnikoma ABC in APD očrtanih krožnic. Dokaži, da velja $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle CAJ$.

Naloga T–7

Poišči vse urejene pare naravnih števil (a, b), za katere velja

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Naloga T–8

Naj bo $n \geqslant 2$ naravno število. Določi število naravnih števil m, za katere je $m^2 + 1$ deljivo z n in $m \leqslant n$.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.