Individuálna súťaž
27. August 2015

Slovak version

Úloha I–1

Nájdite všetky surjektívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné celé čísla a, b platí práve jedna z nasledujúcich rovností:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Poznámky: $\mathbb{N}$ označuje množinu všetkých kladných celých čísel. Funkcia $f\colon X \to Y$ sa nazýva surjektívna, ak pre každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ také, že $f(x) = y$.

Úloha I–2

Nech $n \geqslant 3$ je celé číslo. *Vnútorná uhlopriečka* jednoduchého n-uholníka je uhlopriečka, ktorá je celá vnútri tohto n-uholníka. Označme $D(P)$ počet všetkých vnútorných uhlopriečok jednoduchého n-uholníka P a $D(n)$ najmenšiu možnú hodnotu $D(Q)$, kde Q je jednoduchý n-uholník. Dokážte, že žiadne dve vnútorné uhlopriečky P sa nepretínajú (okrem možných spoločných koncov) práve vtedy, keď $D(P) = D(n)$.

Poznámka: Jednoduchý n-uholník je sám seba nepretínajúci mnohouholník s n vrcholmi. Mnohouholník nie je nutne konvexný.

Úloha I–3

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Označme E priesečník priamok rovnobežných s AC a BD prechádzajúcich bodmi B a A. Priamky EC a ED pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku AEB znova v bodoch F a G. Dokážte, že body C, D, F a G ležia na jednej kružnici.

Úloha I–4

Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (m, n), pre ktoré existujú nesúdeliteľné celé čísla a, b väčšie ako jedna také, že

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

je celé číslo.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–1

Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla a, b, c také, že $abc = 1$, platí nasledujúca nerovnosť:

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Úloha T–2

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ také, že

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

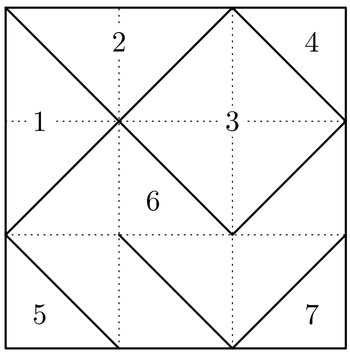
platí pre všetky nenulové reálne čísla x a y.

Úloha T–3

V rade stojí n žiakov na pozíciách 1 až n. Kým sa učiteľ pozerá preč, niektorí žiaci zmenia svoje pozície. Keď sa učiteľ pozrie späť, žiaci stoja znova v rade. Ak žiak, ktorý stál pôvodne na pozícii i, je teraz na pozícii j, hovoríme, že sa posunul o $|i-j|$ krokov. Určte najväčší súčet krokov, o ktorý sa mohli posunuť všetci žiaci.

Úloha T–4

Nech N je kladné celé číslo. V každom z N^2 štvorčekov tabuľky $N \times N$ je nakreslená jedna uhlopriečka. Nakreslené uhlopriečky rozdelia tabuľku $N \times N$ na K oblastí. Pre každé N určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu K.



Príklad pre $N = 3$ a $K = 7$

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–5

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| > |AC|$. Dokážte, že existuje bod D s nasledujúcou vlastnosťou: Ak dva rôzne body X a Y sú vnútri trojuholníka ABC tak, že body B, C, X a Y ležia na kružnici a platí rovnosť

$$|\measuredangle AXB| - |\measuredangle ACB| = |\measuredangle CYA| - |\measuredangle CBA|,$$

tak priamka XY prechádza bodom D.

Úloha T–6

Nech I je stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC s $|AB| > |AC|$. Označme D priesečník priamky AI a strany BC. Predpokladajme, že bod P leží na úsečke BC a platí $|PI| = |PD|$. Označme J bod, ktorý vznikne zobrazením bodu I v osovej súmernosti podľa osi strany BC, a Q bod, ktorý je druhým priesečníkom kružníc opísaných trojuholníkom ABC a APD. Dokážte, že $|\measuredangle BAQ| = |\measuredangle CAJ|$.

Úloha T–7

Nájdite všetky usporiadané dvojice kladných celých čísel (a, b) takých, že platí

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Úloha T–8

Nech $n \geqslant 2$ je celé číslo. Určte počet kladných celých čísel m takých, že $m \leqslant n$ a $m^2 + 1$ je deliteľné číslom n.