Zadanie I–1

Znaleźć wszystkie suriekcje $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takie że dla dowolnej pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniony jest dokładnie jeden z następujących warunków:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Uwaga: Symbol $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Funkcja $f\colon X \to Y$ jest suriekcją jeśli dla dowolnego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $f(x) = y$.

Zadanie I–2

Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. *Przekątna wewnętrzna zwykłego n-kąta* to przekątna zawarta wewnątrz tego n-kąta. Niech $D(P)$ oznacza liczbę wszystkich przekątnych wewnętrznych zwykłego n-kąta P. Niech $D(n)$ oznacza najmniejszą możliwą wartość $D(Q)$, gdzie Q jest zwykłym n-kątem. Udowodnić, że żadne dwie wewnętrzne przekątne n-kąta P się nie przecinają (poza ewentualnym wspólnym końcem) wtedy i tylko wtedy, gdy $D(P) = D(n)$.

Uwaga: Zwykły n-kąt to wielokąt bez samoprzecięć mający n wierzchołków. Wielokąt nie musi być wypukły.

Zadanie I–3

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg. Niech E będzie punktem przecięcia prostych równoległych do AC i BD przechodzących odpowiednio przez punkty B i A. Proste EC i ED przecinają okrąg opisany na trójkącie AEB ponownie w punktach odpowiednio F i G. Udowodnić, że punkty C, D, F i G leżą na jednym okręgu.

Zadanie I–4

Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich (m, n), dla których istnieją takie względnie pierwsze liczby a i b większe niż 1, że

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

jest liczbą całkowitą.

Zadanie T–1

Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c takich, że $abc = 1$ spełniona jest następująca nierówność:

$$\frac{a}{2b + c^2} + \frac{b}{2c + a^2} + \frac{c}{2a + b^2} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Zadanie T–2

Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takie, że równość

$$f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$$

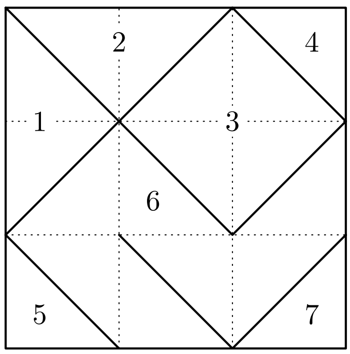
zachodzi dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych x, y.

Zadanie T–3

W szeregu na pozycjach od 1 do n stoi n uczniów. Kiedy ich nauczyciel nie patrzył, niektórzy z nich zmienili swoje miejsca, a gdy znowu na nich spojrzał, uczniowie ponownie stali w szeregu. Uczeń, który na początku stał na pozycji i, a obecnie stoi na pozycji j, zrobił $|i - j|$ kroków. Wyznaczyć największą sumę kroków, którą mogli osiągnąć uczniowie.

Zadanie T–4

Dana jest liczba całkowita dodatnia N. W każdym z N^2 kwadratów jednostkowych planszy $N \times N$ narysowano jedną z przekątnych. Narysowane przekątne dzielą planszę na K części. Dla każdego N wyznaczyć najmniejszą oraz największą możliwą wartość K.



Przykład dla $N = 3$, $K = 7$

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można uzyskać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.

Zadanie T–5

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB > AC$. Udowodnić, że istnieje punkt D o następującej własności: jeżeli dwa różne punkty X i Y leżą we wnętrzu trójkąta ABC w taki sposób, że punkty B, C, X i Y leżą na jednym okręgu, przy czym zachodzi równość

$$\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA,$$

to prosta XY przechodzi przez punkt D.

Zadanie T–6

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $AB > AC$ i niech prosta AI przecina bok BC w punkcie D. Przypuśćmy, że punkt P leży na odcinku BC, przy czym $PI = PD$. Niech J będzie odbiciem punktu I względem symetralnej odcinka BC. Niech Q będzie drugim punktem przecięcia okręgów opisanych na trójkątach ABC i APD. Udowodnić, że $\angle BAQ = \angle CAJ$.

Zadanie T–7

Znaleźć wszystkie uporządkowane pary liczb całkowitych dodatnich (a, b) takie, że

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Zadanie T–8

Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wyznaczyć liczbę takich liczb całkowitych dodatnich m, że $m \leqslant n$ oraz liczba $m^2 + 1$ jest podzielna przez n.