Užduotis I–1

Raskite visas tokias siurjektyvias funkcijas $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kad bet kuriems natūraliesiems skaičiams a ir b galioja lygiai viena iš lygybių

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Pastaba. $\mathbb{N}$ žymi natūraliųjų skaičių aibę. Funkcija $f\colon X \to Y$ vadinama siurjektyvia, jei kiekvienam $y \in Y$ egzistuoja toks $x \in X$, kad $f(x) = y$.

Užduotis I–2

Duotas natūralusis skaičius $n \geqslant 3$. *Paprastojo n-kampio* įstrižainė, esanti n-kampio viduje, vadinama *vidine*. Paprastojo n-kampio P vidinių įstrižainių skaičių pažymėkime $D(P)$, o mažiausią galimą $D(Q)$ reikšmę, kai Q yra bet koks paprastasis n-kampis, pažymėkime $D(n)$. Įrodykite, kad jokios dvi paprastojo n-kampio P vidinės įstrižainės nesikerta (turi bendrą nebent jų abiejų galo tašką) tada ir tik tada, kai $D(P) = D(n)$.

Pastaba. Paprastasis n-kampis yra pats savęs nekertantis daugiakampis su n viršūnių. Daugiakampis neprivalo būti iškilasis.

Užduotis I–3

Keturkampis $ABCD$ įbrėžtas į apskritimą. Tiesė, einanti per B lygiagrečiai AC, ir tiesė, einanti per A lygiagrečiai BD, kertasi taške E. Tiesės EC ir ED kerta trikampio AEB apibrėžtinį apskritimą taške E ir atitinkamai taškuose F bei G. Įrodykite, kad taškai C, D, F ir G priklauso vienam apskritimui.

Užduotis I–4

Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (m, n), kurioms egzistuoja tokie tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai a, b, didesni už 1, kad skaičius

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

yra sveikasis.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Uždavinių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.

Užduotis T–1

Įrodykite, kad jei a, b, c yra bet kokie realieji teigiami skaičiai, tenkinantys lygybę $abc = 1$, tai

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Užduotis T–2

Nustatykite visas funkcijas $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, su visais nenuliniais realiaisiais skaičiais x ir y tenkinančias lygybę

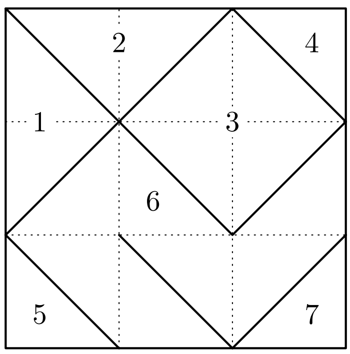
$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y).$$

Užduotis T–3

Eilėje stovėjo n mokinių, jų stovėjimo vietos (pozicijos) sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki n. Mokytojui nusigręžus, kai kurie mokiniai keitė stovėjimo vietą. Jam atsigręžus, visos pozicijos eilėje vėl užimtos. Jei mokinys, pradžioje buvęs pozicijoje i, atsidūrė pozicijoje j, tai sakysime, kad mokinys pajudėjo per $|i-j|$ žingsnių. Nustatykite, per kiek daugiausiai žingsnių kartu sudėjus galėjo pajudėti visi mokiniai.

Užduotis T–4

Duotas natūralusis skaičius N. Kiekviename iš N^2 vienetinių langelių, į kuriuos padalyta $N \times N$ lentelė, nubrėžta viena iš dviejų įstrižainių. Nubrėžtos įstrižainės dalija $N \times N$ lentelę į K sričių. Kiekvienai N reikšmei nustatykite mažiausią ir didžiausią galimą skaičiaus K reikšmes.



Pavyzdys, kai $N = 3$, $K = 7$

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.

Užduotis T–5

Trikampis ABC yra smailasis, ir $AB > AC$. Įrodykite, kad egzistuoja taškas D, pasižymintis tokia savybe: jei bet kurie du skirtingi trikampio ABC vidaus taškai X ir Y kartu su taškais B ir C priklauso vienam apskritimui ir

$$\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA,$$

tai tiesė XY eina per D.

Užduotis T–6

Trikampio ABC, kuriame $AB > AC$, įbrėžtinio apskritimo centrą pažymėkime I, o tiesės AI ir kraštinės BC sankirtos tašką – D. Atkarpos BC taškas P tenkina lygybę $PI = PD$. Taško I atspindį atkarpos BC vidurio statmens atžvilgiu pažymėkime J. Trikampių ABC ir APD apibrėžtinių apskritimų antrąjį sankirtos tašką pažymėkime Q. Įrodykite, kad $\angle BAQ = \angle CAJ$.

Užduotis T–7

Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (a, b), tenkinančias lygybę

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Užduotis T–8

Duotas natūralusis skaičius $n \geqslant 2$. Nustatykite, kiek yra tokių natūraliųjų skaičių m, kad $m \leqslant n$, o $m^2 + 1$ dalijasi iš n.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.