Feladat I–1

Add meg az összes olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szürjektív függvényt, amelyre minden a és b pozitív egészre a következő két egyenlet közül pontosan az egyik teljesül:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Megjegyzés: $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát jelöli. Az $f\colon X \to Y$ függvényt szürjektívnek nevezzük, ha minden $y \in Y$-hoz létezik $x \in X$, hogy $f(x) = y$.

Feladat I–2

Legyen $n \geqslant 3$ egész szám. Egy *egyszerű n-szög belső átlója* olyan átló, ami az n-szögön belül található. Jelölje $D(P)$ egy P egyszerű n-szög összes belső átlójának számát, és jelölje $D(n)$ azt a lehető legkisebb számot, amit $D(Q)$ felvehet, ahol Q egy egyszerű n-szög. Bizonyítsd be, hogy akkor és csak akkor nem metszi egymást P semelyik két belső átlója (a közös végpontoktól eltekintve), ha $D(P) = D(n)$.

Megjegyzés: Az egyszerű n-szög egy önmagát nem metsző n csúcsú sokszög. A sokszög nem feltétlenül konvex.

Feladat I–3

Adott az $ABCD$ húrnégyszög. Húzzunk párhuzamost B-n keresztül AC-vel és A-n keresztül BD-vel, ezek metszéspontja legyen E. Az EC illetve ED egyenesek másik metszéspontja az AEB háromszög körülírt körével legyen F illetve G. Bizonyítsd be, hogy C, D, F és G pontok egy körre illeszkednek.

Feladat I–4

Add meg az összes olyan (m, n) pozitív egész számpárt, melyekhez léteznek a és b egynél nagyobb, relatív prím számok úgy, hogy

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

kifejezés egész.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

Feladat T–1

Bizonyítsd be, hogy az összes a, b, c pozitív valós számra, melyekre $abc = 1$, teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Feladat T–2

Add meg az összes $f \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ függvényt, melyre

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

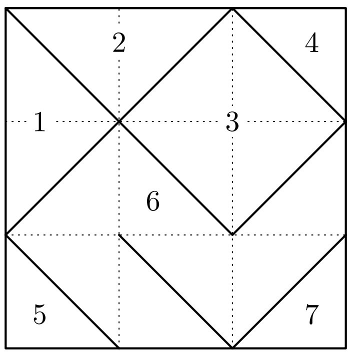
teljesül bármely x és y nem nulla valós számra.

Feladat T–3

Az 1-től n-ig számozott helyekre sorba állítottak n tanulót. Amíg a tanár nem figyelt oda, átrendeződtek. Mire a tanár visszafordul, újra egy sorban állnak. Ha egy diák eredetileg az i. helyen állt, most pedig a j. helyen, akkor azt mondjuk, hogy $|i-j|$ lépést tett. Számold ki a lehető legnagyobb értéket, ami a lépések összege lehet.

Feladat T–4

Legyen N egy pozitív egész szám. Egy $N \times N$-es táblázat mind az N^2 egységmezőjének be van rajzolva az egyik átlója. Ezek az átlók az $N \times N$-es táblázatot K régióra osztják. Minden N-re határozd meg K lehető legkisebb, illetve legnagyobb értékét.



Példa $N = 3$-ra és $K = 7$-re

Feladat T–5

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, melyre $AB > AC$. Mutasd meg, hogy létezik egy D pont a következő tulajdonsággal: amennyiben az X és Y különböző pontok az ABC háromszög belsejében fekszenek úgy, hogy a B, C, X és Y pontok egy körre illeszkednek, továbbá

$$\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA$$

is teljesül, akkor az XY egyenes átmegy D ponton.

Feladat T–6

Legyen I az ABC háromszög $(AB > AC)$ beírt körének középpontja, és messe az AI egyenes a BC oldalt a D pontban. Tegyük fel, hogy a P pont a BC szakasz van, és teljesül rá, hogy $PI = PD$. Továbbá legyen J az I pont képe a BC felezőmerőlegesére való tükrözés után, valamint legyen Q az ABC illetve APD háromszögek körülírt köreinek másik metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy $\angle BAQ = \angle CAJ$.

Feladat T–7

Add meg az összes (a, b) pozitív egész számpárt, melyre

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Feladat T–8

Legyen $n \geqslant 2$ egész szám. Add meg azon m pozitív egészek számát, melyre $m \leqslant n$ és $m^2 + 1$ osztható n-nel.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.