Zadatak I–1

Nađi sve surjektivne funkcije $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je za sve prirodne brojeve a i b točno jedna od sljedećih jednakosti istinita:

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Napomene: $\mathbb{N}$ označava skup svih prirodnih brojeva. Za funkciju $f\colon X \to Y$ kažemo da je surjektivna ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.

Zadatak I–2

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. *Unutrašnja dijagonala jednostavnog n–terokuta* je dijagonala koja je sadržana unutar tog n–terokuta. Označimo s $D(P)$ broj svih unutrašnjih dijagonala jednostavnog n–terokuta P te s $D(n)$ najmanju moguću vrijednost od $D(Q)$, gdje je Q neki jednostavni n–terokut. Dokaži da se nikoje dvije unutrašnje dijagonale od P ne sijeku (osim možda u zajedničkoj krajnjoj točki) ako i samo ako je $D(P) = D(n)$.

Napomena: Jednostavni n–terokut je mnogokut s n vrhova koji sam sebe ne presijeca. Mnogokut ne mora nužno biti konveksan.

Zadatak I–3

Neka je $ABCD$ tetivni četverokut. Neka je E presjek pravaca paralelnih s AC i BD koji prolaze kroz B i A, redom. Pravci EC i ED sijeku kružnicu opisanu trokutu AEB još u točkama F i G, redom. Dokaži da točke C, D, F i G leže na istoj kružnici.

Zadatak I–4

Nađi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje postoje relativno prosti prirodni brojevi a i b veći od 1 takvi da je

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

cijeli broj.

Vrijeme pisanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 minuta
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne odražava njihovu težinu.

Zadatak T–1

Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c takve da je $abc = 1$ vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Zadatak T–2

Odredite sve funkcije $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takve da jednakost

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

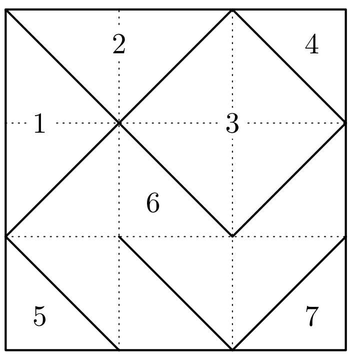
vrijedi za sve realne brojeve x i y različite od nule.

Zadatak T–3

U redu stoji n učenika na mjestima od 1 do n. Kad učitelj odvrati pogled, neki učenici promijene svoja mjesta. Kad učitelj vrati pogled, učenici opet stoje u redu. Ako se učenik koji se na početku nalazio na mjestu i sada nalazi na mjestu j, kažemo da se pomaknuo za $|i-j|$ koraka. Odredite najveći mogući zbroj koraka koji svi učenici zajedno mogu postići.

Zadatak T–4

Neka je N prirodni broj. U svakom od N^2 jediničnih kvadrata ploče $N \times N$ povučena je jedna od dvije dijagonale. Povučene dijagonale dijele danu ploču $N \times N$ na K područja. Za svaki N, odredite najmanju i najveću moguću vrijednost broja K.



Primjer za $N = 3$, $K = 7$

Zadatak T–5

Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji je $|AB| > |AC|$. Dokažite da postoji točka D sa sljedećim svojstvom: za svake dvije različite točke X i Y koje se nalaze u unutrašnjosti trokuta ABC tako da točke B, C, X i Y leže na istoj kružnici te vrijedi

$$|\sphericalangle AXB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CYA| - |\sphericalangle CBA|,$$

pravac XY prolazi točkom D.

Zadatak T–6

Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC u kojem je $|AB| > |AC|$ te neka pravac AI siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pretpostavimo da postoji točka P na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|PI| = |PD|$. Nadalje, neka je točka J simetrična točki I s obzirom na simetralu stranice $\overline{BC}$ te neka je točka Q drugi presjek kružnica opisanih trokutima ABC i APD. Dokažite da je $|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAJ|$.

Zadatak T–7

Nađite sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da vrijedi

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Zadatak T–8

Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj. Odredite broj prirodnih brojeva m takvih da je $m \leqslant n$ i da je broj $m^2 + 1$ djeljiv brojem n.

Vrijeme pisanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 minuta
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne odražava njihovu težinu.