Problème I–1

Trouver toutes les fonctions surjectives $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous les entiers strictement positifs a et b, exactement une des deux équations suivantes est vérifiée :

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Remarques : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers strictement positifs. Une fonction $f\colon X \to Y$ est dite surjective si pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$.

Problème I–2

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Une *diagonale intérieure* d'un *n-gone simple* est une diagonale qui est entièrement contenue dans le n-gone. Notons $D(P)$ le nombre de diagonales intérieures dans un n-gone simple P et $D(n)$ la plus petite valeur possible de $D(Q)$, avec Q un n-gone simple. Prouver que $D(P) = D(n)$ si et seulement si aucune paire de diagonales intérieures ne se coupent (à part éventuellement en un sommet commun).

Remarque : Un n-gone simple est un polygone à n sommets tel que deux côtés distincts ne se coupent pas. Un polygone n'est pas nécessairement convexe.

Problème I–3

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit. Soit E le point d'intersection des parallèles à AC, resp. BD, qui passent par les points B, resp. A. Les droites EC et ED coupent une seconde fois le cercle circonscrit du triangle AEB en F et G respectivement. Prouver que les points C, D, F et G sont sur un cercle.

Problème I–4

Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (m, n) pour lesquelles il existe des entiers a et b premiers entre eux et strictement plus grands que 1 tels que

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

est un nombre entier.

Durée : 5 heures
Temps pour poser des questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes n'est pas représentatif de leur difficulté.

Problème T–1

Prouver que pour tous les nombres réels strictement positifs a, b, c vérifiant $abc = 1$, l'inéquation suivante est vérifiée :

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Problème T–2

Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ telles que

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

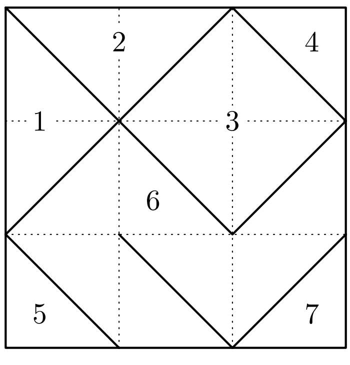
pour tous les nombres réels non-nuls x et y.

Problème T–3

Sur une ligne se tiennent n étudiants aux positions 1 à n. Pendant que l'enseignant tourne le dos, certains étudiants changent de position. Au moment où le professeur se retourne ils sont à nouveau en ligne. Si un étudiant qui était initialement à la position i se trouve désormais à la position j, on dit que l'étudiant s'est déplacé de $|i-j|$ pas. Déterminer la somme maximale de pas que les étudiants peuvent atteindre.

Problème T–4

Soit N un entier positif. Dans chacun des N^2 carrés unité d'un tableau $N \times N$ on dessine une des deux diagonales. Les diagonales dessinées divisent le tableau $N \times N$ en K régions. Déterminer, pour chaque N, la plus petite et la plus grande valeur possible pour K.



Exemple avec $N = 3$, $K = 7$

Problème T–5

Soit ABC un triangle aigu avec $AB > AC$. Prouver qu'il existe un point D avec la propriété suivante : chaque fois que deux points distincts X et Y sont situés à l'intérieur du triangle ABC de telle manière que les points B, C, X et Y sont cocycliques et

$$\angle AXB - \angle ACB = \angle CYA - \angle CBA,$$

la ligne XY passe par D.

Problème T–6

Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC avec $AB > AC$ et soit D l'intersection des lignes AI et BC. On suppose qu'il existe un point P sur le segment BC tel que $PI = PD$. De plus, soit J le point obtenu en prenant le symétrique de I par la médiatrice du segment BC, et soit Q la deuxième intersection des cercles circonscrits des triangles ABC et APD. Prouver que $\angle BAQ = \angle CAJ$.

Problème T–7

Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (a, b) qui vérifient

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Problème T–8

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs m tels que $m \leqslant n$ et $m^2 + 1$ est divisible par n.